PROCEEDINGS OF IAM, V.6, N.2, 2017, pp.252-265

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ*

Ф.А. Алиев[1], Н.А. Алиев[1], Н.А. Сафарова[1], К.Г. Гасымова[2], М.Ф. Раджабов[3]

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
[2] Азербайджанский Педагогический Университет, Баку, Азербайджан
[3]Институт Систем Управления, НАН Азербайджана
e-mail: f_aliev@yahoo.com

Резюме. Рассматривается задача аналитического конструирования регуляторов (АКР), когда движение объекта описывается системой линейных дифференциальных уравнений дробно–рациональных производных с постоянными коэффициентами. Приводятся выражения для аналогичного (с обычной производной) уравнения Эйлера-Лагранжа, где дальше с помощью функции Миттага-Леффлера строится ее фундаментальная матрица-решение. Приведенная схема такая, что порядок производной $\alpha = \frac{p}{q}$ правильная дробь, где p и q нечетные числа. Для простоты изложения выбрано $p=1$, $q=3$ и с помощью метода АКР Летова получены формулы для матричного коэффициента оптимального регулятора. Приведен пример, иллюстрирующий предложенный метод.

Ключевые слова: Аналитическое конструирование регуляторов, система дифференциальных уравнений дробной производной, функции Миттага-Леффлера, фундаментальная матрица решений, собственное значение

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

1. Введение

Как известно, решение задачи синтеза оптимального регулятора, когда движение описывается системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и имеется квадратичный функционал, который требуется минимизировать в установившемся режиме с помощью линейной обратной связи с постоянными коэффициентами, впервые рассмотрено А. М. Летовым в его знаменитой работе [17]. Сутью метода является описание соответствующей системы уравнений Эйлера-Лагранжа [7,12,17], где собственные значения ее матрицы коэффициентов зеркально симметричны относительно мнимой оси на комплексной плоскости, и с помощью ее решения - построение матрицы цепи обратной связи. В работе [13,19] эта задача решена с помощью матричных

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 5.12.2017

алгебраических уравнений Риккати, а в [15,16] в более общем виде, стохастическом постановке, когда движение объекта описывается системой линейных дифференциальных операторных уравнений со случайными возмущениями и наблюдение с шумов измерений, где суть метода опирается на факторизацию полиномиальных матриц и сепарацию дробно–рациональных выражений.

В настоящее время бурно развиваются разные задачи оптимизации, когда движение объекта описывается дифференциальным уравнением с дробной производной [4-6]. Отметим, что математическая модель теории памяти металла приводится к задаче для дифференциального уравнения с производной дробного порядка [18]. Уравнения с такими задачами исследованы в [3]. Однако задачи АКР [17] с дробной производной до настоящего времени не исследованы. Поэтому в данной статье приводится постановка задачи АКР с дробной производной. Далее приводится соответствующая система уравнений Эйлера-Лагранжа. Используя функцию Миттага-Леффлера, строится фундаментальная матрица решения соответствующей системы уравнений Эйлера-Лагранжа. Далее с помощью алгоритма, использованного в [17], строится матричный коэффициент цепи обратной связи оптимального регулятора с дробной производной. Результаты иллюстрируются численным примером.

2. Постановка задачи АКР с дробной производной и уравнения Эйлера-Лагранжа.

Сначала сформулируем задачи АКР с дробной производной. Пусть движение объекта описывается следующей системой линейных дифференциальных уравнений с дробной производной

$$D^{\alpha}x(t)=Fx(t)+Gu(t),x(0)=x_0, \tag{1}$$

где $0<\alpha<1$, $x(t)-n$ мерный фазовый вектор, $u(t)-m$ мерный вектор управляющих воздействий, F , G - постоянные матрицы размерности $n\times n$, $n\times m$, соответственно, и являются стабилизируемыми парами [14, 17] дробная производная порядка α понимается в смысле Римана-Лиувилля [4]. Требуется найти такой закон регулирования

$$u(t)=Kx(t), \tag{2}$$

чтобы замкнутая система (1), (2)

$$D^{\alpha}x(t)=(F+GK)x(t),x(0)=x_0 \tag{3}$$

стала асимптотически устойчивой и следующий квадратичный функционал

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(x'(t)Qx(t)+u'(t)Ru(t)\right)dt \tag{4}$$

принял по (2), (3) минимальное значение. Здесь $Q = Q' \geq 0,\ R = R' \geq 0$ матрицы соответствующих размерности, *штрих* означает операцию транспонирования.

Для решения задачи (1)-(4), как в [8, 11,12,14], составим следующий расширенный функционал

$$\bar{J} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\left(x'Qx + u'Ru \right) + \lambda' \left(Fx + Gu - D^\alpha x \right) \right] dt \,. \tag{5}$$

Подставим выражение $D^\alpha x$ из [2,4]

$$D^\alpha x = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\left(t-\tau\right)^{-\alpha}}{\left(-\alpha\right)!} x\left(\tau\right) d\tau, \tag{6}$$

в (5) и после некоторых преобразований приведенное в (6) для $\bar{J}$ получим [8]

$$\begin{gathered} \bar{J} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \Big\{ x'(\tau) Q x\left(\tau\right) + u'\left(\tau\right) R u\left(\tau\right) + \lambda'\left(t\right)\left[Fx\left(\tau\right) + Gu\left(\tau\right) \right] - \\ - \int_\tau^\infty \lambda'\left(t\right) \frac{\left(t-\tau\right)^{-\alpha}}{\left(-\alpha\right)!} dt x\left(\tau\right) \Big\} d\tau. \end{gathered} \tag{7}$$

Отметим, что последнее слагаемое в (7) после интегрирования по частям и несложных преобразований переходит к виду

$$-\int_\tau^\infty \lambda'\left(t\right) \frac{\left(t-\tau\right)^{-\alpha}}{\left(-\alpha\right)!} dt = D^\alpha \lambda'(\tau) \,. \tag{8}$$

Теперь учитывая (8) в (7), имеем

$$\begin{gathered} \bar{J} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \Big\{ x'\left(\tau\right) Q x\left(\tau\right) + u'\left(\tau\right) R u\left(\tau\right) + \lambda'\left(\tau\right)\left[Fx\left(\tau\right) + Gu\left(\tau\right) \right] + \\ + \left[D^\alpha \lambda'\left(\tau\right) \right] x\left(\tau\right) \Big\} d\tau, \end{gathered} \tag{9}$$

и аналогично [1,2,8,12,14] из (9)

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial x} = x'\left(t\right) Q + \lambda'\left(t\right) F + D^\alpha \lambda'\left(t\right) = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial u} = u'\left(t\right) R + \lambda'\left(t\right) G = 0, \tag{11}$$

с условиями [7,17]

$$x\left(\infty\right) = 0, \quad \lambda\left(\infty\right) = 0 \,. \tag{12}$$

Если учитывать (10) в (1) совместно с (10), уравнение Эйлера-Лагранжа для задачи (1)-(4) будет иметь вид [1,7,8]

$$D^\alpha x = Fx - GR^{-1}G'\lambda,$$
$$D^\alpha \lambda = -Qx - F'\lambda. \qquad (13)$$

Отметим, что матрица уравнений (13)

$$H = \begin{bmatrix} F & -GR^{-1}G' \\ -Q & -F' \end{bmatrix}, \qquad (14)$$

имеет собственные значения $\mu_i^\alpha \left(i = \overline{1,2n} \right)$, которые являются “зеркально-симметричными комплексной плоскости, т.е. если μ_i^α собственные значения матриц (14), то $-\mu_i^\alpha$ также являются собственными значениями матриц (14). Таким образом, (13) является гамильтоновой системой.

Отметим, что в общем случае свойство «зеркальной симметричности» собственных значений μ_i^α матриц (14) не сохраняется для μ_i. Действительно, если $\alpha = \dfrac{p}{q}$ и один из p или q являются четными числами, то потеряется свойство “зеркальной симметричности”, т.е. или все они окажутся на правой полуплоскости, или μ_i^α будут находиться на мнимой оси. Таким образом, для нашего случая задача АКР требует, чтобы оба p и q являлись нечетными числами. Для простоты рассмотрим случай, когда $p = 1, q = 3$ и все собственные значения матрицы H являются действительными числами.

Отметим, что дискретный аналог задачи АКР [7,9,10] для дробных производных тоже не исследован и имеет смысл в дальнейшем рассмотреть его.

2. Алгоритм решения задачи АКР для дробной производной.

Сначала, используя преобразование T (T^{-1} существует)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\lambda}(t) \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix}, \qquad (15)$$

предположим, что

$$T^{-1}HT = \begin{bmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{bmatrix}, \qquad (16)$$

где T такое, что A_+ имеет собственные значения, лежащие на левой полуплоскости, а A_- на правой. Тогда система (13) с помощью преобразования (15), (16) переходит к виду

$$D^{1/3}\begin{bmatrix}\tilde{x}(t)\\ \tilde{\lambda}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}(t)\\ \tilde{\lambda}(t)\end{bmatrix}. \qquad (17)$$

Для простоты, не теряя общности, принимаем обозначение

$$A^{1/3}=\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}. \qquad (18)$$

Тогда решение преобразованной с помощью (15), (16) системы (17) имеет вид

$$\begin{bmatrix}\tilde{x}(t)\\ \tilde{\lambda}(t)\end{bmatrix}=\tilde{X}(t)\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}, \qquad (19)$$

где $\tilde{X}(t)$ является фундаментальной матрицей решений системы (17) и определяется с помощью преобразованной функции Миттага-Леффлера [4, 6]

$$\tilde{X}(t)=-\begin{bmatrix}A_+^{-2} & 0\\ 0 & A_-^{-2}\end{bmatrix}\frac{t^{-2/3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!}-\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!}e^{\begin{bmatrix}A_+^3\tau & 0\\ 0 & A_-^3\tau\end{bmatrix}}d\tau-$$

$$-\begin{bmatrix}A_+^{-1} & 0\\ 0 & A_-^{-1}\end{bmatrix}\frac{t^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!}-\begin{bmatrix}A_+^2 & 0\\ 0 & A_-^2\end{bmatrix}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!}e^{\begin{bmatrix}A_+^3\tau & 0\\ 0 & A_-^3\tau\end{bmatrix}}d\tau+e^{\begin{bmatrix}A_+^3 t & 0\\ 0 & A_-^3 t\end{bmatrix}}, \qquad (20)$$

$\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$ постоянный неизвестный вектор-столбец с размерностью $2n$. Для того, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость решения системы (17) надо выбрать $c_2=0$, так как это вытекает из диагональности матриц $\tilde{X}(t)$ (20) и условия $\mathrm{Re}(A_+)<0$.

Обозначая

$$\tilde{X}(t)=diag\left\{\tilde{X}_1(t),\quad \tilde{X}_2(t)\right\}, \qquad (21)$$

из (20) имеем †)

† Аналогично $\tilde{X}_2(t)$ можно определить из (20).

$$\tilde{X}_1(t) = -A_+^{-2}\frac{t^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!} - A_+\int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!}e^{A_+^3\tau}d\tau - A_+^{-1}\frac{t^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!} - \qquad (22)$$

$$-A_+^2\int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!}e^{A_+^3\tau}d\tau + e^{A_+^3 t}.$$

и после некоторых простых преобразований для $\begin{bmatrix}\tilde{x}(t)\\ \tilde{\lambda}(t)\end{bmatrix}$ из (19) с учетом (21) и (22) получим

$$\tilde{x}(t) = \tilde{X}_1(t)C_1, \qquad \tilde{\lambda}(t) = 0. \qquad (23)$$

Исходя из преобразований (15) при условии (23) имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= T_1\tilde{X}_1(t)C_1, \\ \lambda(t) &= T_3\tilde{X}_1(t)C_1. \end{aligned} \qquad (24)$$

Находя из первого уравнения (24) $\tilde{X}_1(t)C_1$ (при условии, что T_1^{-1} существует) в виде

$$\tilde{X}_1(t)C_1 = T_1^{-1}x(t),$$

и подставив ее на второе уравнение (24), получим

$$\lambda(t) = T_3T_1^{-1}x(t). \qquad (25)$$

Если подставить (25) в (11), получим

$$u(t) = -R^{-1}G'T_3T_1^{-1}x(t), \qquad (26)$$

которое является решением задачи АКР (1)-(4).

В данном случае замкнутая система (1)+(26) будет

$$D^{(\alpha)}x(t) = (F - GR^{-1}G'T_3T_1^{-1})x(t) \equiv Bx(t), \quad x(0) = x_0, \qquad (27)$$

где $B = (F - GR^{-1}G'T_3T_1^{-1})$.

При $\alpha = \dfrac{1}{3}$ матричное решение системы (27) принимает вид [4]

$$X(t)=\frac{(t+1)^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!}B^{-2}+\frac{(t+1)^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!}B^{-1}+\frac{(t+1)^{0}}{0!}B^{0}+\frac{(t+1)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!}B^{1}+\frac{(t+1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!}B^{2}+\ldots=$$

$$=\left[\frac{(t+1)^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!}B^{-2}+\frac{(t+1)^{\frac{1}{3}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!}B+\ldots\right]+\left[\frac{(t+1)^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!}B^{-1}+\frac{(t+1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!}B^{2}+\ldots\right]+e^{B^{3}(t+1)}.$$

(28)

Принимая обозначение $t+1=\xi$,

$$F_1(\xi)=\frac{\xi^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!}B^{-2}+\frac{\xi^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!}B+\ldots;\quad F_2(\xi)=\frac{\xi^{\frac{-1}{3}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!}B^{-1}+\frac{\xi^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!}B^{2}+\ldots \qquad (29)$$

после несложных преобразований, пользуясь определением дробного интегрирования

$$I_{0+}^{\frac{2}{3}}F_1(\xi)=\frac{\xi^{0}}{0!}B^{-2}+\frac{\xi}{1!}B+\ldots\ F_{10}(\xi)=B^{-2}e^{B^{3}\xi}+F_{10}(\xi),\ \ D^{\frac{2}{3}}F_{10}(\xi)=0,$$

и производного [4], имеем

$$F_1(\xi)=B^{-2}\frac{d}{d\xi}\int_{0}^{\xi}\frac{(\xi-\eta)^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!}e^{B^{3}\eta}d\eta.$$

После несложных преобразований последнее выражение будет иметь вид

$$F_1(t+1)=B^{-2}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t+1}\frac{(t+1-\eta)^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!}e^{B^{3}\eta}d\eta=-B^{-2}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t+1}\left(\frac{(t+1-\eta)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!}\right)'_{\eta}e^{B^{3}\eta}d\eta=$$

$$= -B^{-2}\frac{d}{dt}\left[\frac{(t+1-\eta)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!}e^{B^3\eta}\Bigg|_{\eta=0}^{t+1} - \int_0^{t+1}\frac{(t+1-\eta)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!}B^3e^{B^3\eta}d\eta\right] =$$

$$= B^{-2}\frac{(t+1)^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!} + B\int_0^{t+1}\frac{(t+1-\eta)^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!}e^{B^3\eta}d\eta\ . \qquad (30)$$

Аналогично (30), для $F_2(\xi)$ из (29) имеем

$$I_{0+}^{\frac{1}{3}}F_2(\xi) = \frac{\xi^0}{0!}B^{-1} + \frac{\xi}{1!}B^2 + \ldots + F_{20}(\xi) = B^{-1}e^{B^3\xi} + F_{20}(\xi),\ \ D^{\frac{1}{3}}F_{20}(\xi) = 0\ ,$$

$$F_2(\xi) = B^{-1}\frac{d}{d\xi}\int_0^{\xi}\frac{(\xi-\eta)^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!}e^{B^3\eta}d\eta\ ,$$

$$F_2(t+1) = B^{-1}\frac{d}{dt}\int_0^{t+1}\frac{(t+1-\eta)^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!}e^{B^3\eta}d\eta = -B^{-1}\frac{d}{dt}\int_0^{t+1}\left(\frac{(t+1-\eta)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!}\right)'_{\eta}e^{B^3\eta}d\eta =$$

$$= -B^{-1}\frac{d}{dt}\left[\frac{(t+1-\eta)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!}e^{B^3\eta}\Bigg|_{\eta=0}^{t+1} - \int_0^{t+1}\frac{(t+1-\eta)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!}B^3e^{B^3\eta}d\eta\right] =$$

$$= B^{-1}\frac{(t+1)^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!} + B^2\int_0^{t+1}\frac{(t+1-\eta)^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!}e^{B^3\eta}d\eta\ . \qquad (31)$$

Подставляя (30) и (31) в (28) получим:

$$X(t) = B^{-2}\frac{(t+1)^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!} + B\int_0^{t+1}\frac{(t+1-\eta)^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!}e^{B^3\eta}d\eta + B^{-1}\frac{(t+1)^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!} +$$

$$+B^2\int_0^{t+1}\frac{(t+1-\eta)^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!}e^{B^3\eta}d\eta+e^{B^3(t+1)}. \qquad (32)$$

Тогда общее решение уравнения (27) принимает вид:

$$x(t)=X(t)C, \qquad (33)$$

где $X(t)$ определяется как (32).

Учитывая начальное условие (1) в (33), имеем:

$$X(0)C=x(0)=x_0, \qquad (34)$$

где из (32) имеем:

$$X(0)=\frac{B^{-2}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!}+B\int_0^1\frac{(1-\eta)^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!}e^{B^3\eta}d\eta+\frac{B^{-1}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!}+B^2\int_0^1\frac{(1-\eta)^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!}e^{B^3\eta}d\eta+e^{B^3}. \qquad (35)$$

Определяя постоянное C из (34) в виде

$$C=X^{-1}(0)x_0, \qquad (36)$$

и подставляя (35) в (36) а его в общее решение (33) для решения задачи Коши имеем:

$$x(t)=X(t)X^{-1}(0)x_0. \qquad (37)$$

Таким образом, из (32) $\lim_{t\to\infty}X(t)=0$ и из (37) получаем, что замкнутая система (27) является асимптотически устойчивой, т.е. условия (12) соблюдается.

Результаты проиллюстрируем на следующем числовом примере.

Пример 1. Пусть имеется следующее скалярное дифференциальное уравнение с дробной производной α

$$D^\alpha x=x+u$$

и с квадратичным критерием качества

$$J=\int_0^\infty(3x^2+u^2)dt.$$

Тогда уравнение Эйлера –Лагранжа (13) и матрица Гамильтона (14) имеет вид

$$\begin{bmatrix}D^\alpha x\\ D^\alpha\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \lambda\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -3 & -1\end{bmatrix}.$$

Легко найти, что собственные значения матрицы H будут

$$\mu^\alpha=\pm2. \qquad (38)$$

Для того, чтобы μ-корни обладали свойством зеркальной симметричности, для простоты выбираем $\alpha = \frac{1}{3}$. Тогда из (18) и (38) имеем

$$\mu_1 = 8,\ \mu_2 = -8.$$

Сейчас построим матрицу T из (15) для H в следующем виде

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

где $T_1 = 1,\ T_3 = 3$, и из (6) $A_+ = -2,\ A_- = 2.$

Если учесть это в (25), то для $\lambda(t)$ имеем

$$\lambda(t) = 3x(t),$$

а из (26)

$$u(t) = -3x(t).$$

Таким образом, замкнутая система (3) или (27) примет вид

$$D^{1/3}x = -2x,\ x(0) = x_0,$$

а ее решение из (32) (при $B = -2$) будет иметь вид [1, 7, 11,14]

$$x(t) = \left[\frac{1}{4}\frac{(t+1)^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!} - 2\int_0^{t+1} \frac{(t+1-\eta)^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!} e^{-8\eta} d\eta - \frac{1}{2}\frac{(t+1)^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!} + \right.$$

$$\left. + 4\int_0^{t+1} \frac{(t+1-\eta)^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!} e^{-8\eta} d\eta + e^{-8(t+1)} \right] \times \tag{39}$$

$$\times \left[\frac{1}{4\left(-\frac{2}{3}\right)!} - 2\int_0^1 \frac{(1-\eta)^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!} e^{-8\eta} d\eta - \frac{1}{2\left(-\frac{1}{3}\right)!} + 4\int_0^1 \frac{(1-\eta)^{-\frac{1}{3}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!} e^{-8\eta} d\eta + e^{-8} \right]^{-1} x(0).$$

Легко можно показать, что при решение (39) $t \to \infty$ решение стремится к нулю, т.е. $x(t) \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aliev F.A. and Larin V.B. Optimization of linear control systems, Gordon Breach, Amsterdam, 1998, 272 p.
2. Mittag-Leffler G. Sur la representation analytique d`une branche uniformed`une function monogene, Acta Mathematica, 29, 1904, pp.101-181.
3. Monje C.A., Chen Y.Q., Vinagre B.M., Xue D., Felik V. Fractional-order systems and controls, Fundamentals and applications, Springer-Verlag, London, 2010, 414 p.
4. Samko S.G, Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, 1993, 780 p.
5. Srivastava H.M. Some families of Mittag-Leffler type functions and associated operators of fractional calculus (survey), TWMS J. Pure and Applied Mathematics, V.7, N.2, 2016, pp.123-145.
6. Srivastava H.M., Aliev N.A., Mammadova G.M., Aliev F.A. Some remarks on the paper, entitled “Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and Mittag-Leffler type functions” by Tomovski Z., Hiffer and Srivastava H.M. TWMS J. of Pure and Applied Mathematics, 2017, V.8, N.1, pp.112-114.
7. Алиев Ф.А., Ларин В.Б., Науменко К.И., Сунцев В.И. Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления, Киев, Наукова Думка, 1978, 327 с.
8. Алиев Ф.А. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем, Элм, Баку, 1989, 320 с.
9. Алиев Ф.А., Ларин В.Б. Синтез оптимальных импульсных регуляторов при идеальном измерении координат объекта, В кн.: Навигационные гироскопические системы, К., 1973, с.5-28.
10. Алиев Ф.А., Ларин В.Б. Синтез дискретных инвариантных во времени систем стабилизации, В кн.: Дискретные системы управления, К., 1974, с.3-22.
11. Андреев Ю.И. Управление конечномерными линейными объектами, М., Наука, 1976, 424 с.
12. Брайсон А., Хо Ю.Ш. Прикладная теория оптимального управления, Мир, 1972, 544 с.
13. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем, М., Мир, 1972, 398 с.

14. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления, М., Мир, 1977, 656 с.
15. Ларин В.Б., Сунцев В.И. О задаче аналитического конструирования регуляторов, Автоматика и телемеханика, 1968, О задаче аналитического конструирования регуляторов, Вып.4, 12, с.142-145.
16. Ларин В.Б., Науменко К.И., Сунцев В.И. Спектральные методы синтеза линейных систем с обратной связью, Киев, Наука Думка, 1973, 151 с.
17. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов, Автоматика и телемеханика, 1960, Т.21, Вып.4, с.436-441.
18. Локшин А.А., Суворова Ю.В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью, Изд-во Московского Университета, 1982, 152 с.
19. Репин Ю.А., Третьяков В.Е. Решение задачи об аналитическом конструировании регуляторов на электронных моделирующих устройствах, Автоматика и телемеханика, 1963, Т.24, Вып.6, с. 738-743

Analytical construction of regulators for systems with fractional derivatives

F. A. Aliev[1], N.A. Aliev[1], N.A. Safarova[1], K.G. Gasimova[2] , M.F. Radjabov[3]
[1] Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan
[2] Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan
[3]Institute of Control Systems, NAS of Azerbaijan
e-mail: f_aliev@yahoo.com

ABSTRACT

The problem of analytic construction of regulators (AKP) is considered when the motion of an object is described by a system of linear differential equations of fractional derivatives with constant coefficients. Expressions are given for an analogous (ordinary derivative) Euler-Lagrange equation, where the fundamental matrix-solution is constructed using the Mittag-Leffler function. The above scheme is such that the order of the derivative $\alpha = \frac{p}{q}$ is a proper fraction, where p and q are odd numbers. For the simplicity, the presentation $p=1,\ q=3$ were chosen, and formulas for the matrix coefficient of the optimal regulator were obtained using the Letov method. An example illustrating the proposed method is given.

Keywords: Analytical construction of regulators, system of differential equations of fractional derivative, Mittag-Leffler functions, fundamental matrix of solutions, eigenvalues

REFERENCES

1. Aliev F.A. and Larin V.B. Optimization of linear control systems, Gordon Breach, Amsterdam, 1998, 272 p.
2. Mittag-Leffler G. Sur la representation analytique d`une branche uniformed`une function monogene, Acta Mathematica, 29, 1904, pp.101-181.
3. Monje C.A., Chen Y.Q., Vinagre B.M., Xue D., Felik V. Fractional-order systems and controls, Fundamentals and applications, Springer-Verlag, London, 2010, 414 p.
4. Samko S.G, Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, 1993, 780 p.
5. Srivastava H.M. Some families of Mittag-Leffler type functions and associated operators of fractional calculus (survey), TWMS J. Pure and Applied Mathematics, V.7, N.2, 2016, pp.123-145.
6. Srivastava H.M., Aliev N., Mammadova G.M., Aliev F.A. Some remarks on the paper, entitled "Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and Mittag-Leffler type functions" by Tomovski Z., Hiffer and Srivastava H.M. TWMS J. of Pure and Applied Mathematics, 2017, V.8, N.1, pp.112-114.
7. Aliev F.A., Larin V.B., Naumenko K.I., Suntsev V.I. Optimizatsiya lineynıkh invariantnikh vo vremeni sistem upravleniya, Kiev, Naukova Dumka, 1978, 327 s. (Optimization of linear time-invariant control systems, Kiev, Naukova Dumka, 1978, 327 p.) (in Russian).
8. Aliev F.A. Metodı resheniya prikladnıkh zadach optimizatsii dinamicheskikh sistem, Elm, Baku, 1989, 320 s. (Aliev F.A. Methods for solving applied problems of optimization of dynamic systems, Elm, Baku, 1989, 320 p.) (in Russian).
9. Aliev F.A., Larin V.B. Sintez optimalnikh impul'snıkh requlyatorov pri ideal'nom izmerenii koordinat ob'ekta, V kn.: Navigatsionnıe giroskopicheskie sistemi, Kiev, 1973, s.5-28 (Aliev F.A., Larin V.B. Synthesis of optimal impulse regulators with an ideal measurement of the coordinates of the object, In: Navigation gyroscopic systems, Kiev, 1973, p.5-28.) (in Russian).
10. Aliev F.A., Larin V.B. Sintez diskretnıkh invariantnıkh vo vremeni sistem stabilizatsii, V kn.: Diskretnıe sistemı upravleniya, Kiyev, 1974, s.3-22

(Aliev F.A., Larin V.B. Synthesis of Discrete Time-Invariant Stabilization Systems, in: Discrete Control Systems, Kiev, 1974, pp.3-22.) (in Russian).

11. Andreev Yu.I. Upravlenie konechnomernımi lineynımi ob’ektami, M., Nauka, 1976, 424 s. (Andreev Yu.I. Control of finite-dimensional linear objects, M., Nauka, 1976, 424 p.) (in Russian).
12. Brayson A., KhoY.Sh. Prikladnaya teoriya optimal’nogo upravleniya, Mir, 1972, 544 s. (Brayson A., KhoYu-Shi. Applied Theory of optimal control, Mir, 1972, 544 p.) (in Russian).
13. Kalman R., Falb P., Arbib M. Ocherki po matematicheskoy teorii sistem, M., Mir, 1972, 398 s. (Studies on the mathematical theory of systems, M., Mir, 1972, 398 p.) (in Russian).
14. Kvakernaak Kh., Sivan R. Lineynıe optimal’nıe sistemı upravleniya, M, Mir, 1977, 656 s. (Kvakernaak Kh., Sivan R. Linear optimal control system, M, Mir, 1977, 656 p.) (in Russian).
15. Larin V.B., Suntsev V.I. O zadache analiticheskogo konstruirovaniya regulyatorov, Avtomatika i telemekhanika, 1968, N.12, s.142-145 (Larin V.B., Suntsev V.I. Concerning controller analytic design problem, Automation and Remote Control, 1968, N.12, pp.142-145.) (in Russian).
16. Larin V.B., Naumenno K.I., Suntsev V.I. Spektral’nıe metodı sinteza lineynıkh sistem s obratnoy svyaz’yu, Kiev, Nauka Dumka, 1973, 151 s. (Spectral methods for the synthesis of linear systems with feedback, Kiev, Nauka Dumka, 1973, 151 p.) (in Russian).
17. Letov A.M. Analiticheskoe konstruirovanie regulyatorov, Avtomatika i Telemekhanika, 1960, N.4, s.436-441 (Letov A.M. Analytical design of regulators, Automation and Remote Control, 1960, V.21, N.4, pp.436-441.) (in Russian).
18. Lokshin A.A., Suvorova Yu.V. Matematicheskaya teoriya rasprostraneniya voln v sredakh s pamyat’yu, Izd-vo Moskovskogo Universiteta, 1982, 152 s. (Lokshin A.A., Suvorova Yu.V. The mathematical theory of wave propagation in media with memory, Publ. Moscow University, 1982, 152 p.) (in Russian).
19. Repin Yu.A., Tret’yakov V.E. Reshenie zadachi ob analiticheskom konstruirovanii regulyatorov na elektronnıkh modeliruyushikh ustroystvakh, Avtomatika i Telemekhanika, 1963, N.6, s.738-743 (The solution of the problem of analytic construction of regulators on electronic modeling devices, Automation and Remote Control, 1963, V.24, N.6, pp.738-743.) (in Russian).